



ce  
pre  
UNI

**CICLO**  
**PREUNIVERSITARIO**

**2024-1**

# Álgebra

**TEMA**

**Programación lineal II**



# Método Geométrico

Dado el Problema de Programación Lineal  $PPL$  con dos variables independientes  $x$  e  $y$ , donde se quiere optimizar la función objetivo  $f$  (optimizar significa encontrar el máximo valor o el mínimo valor) y los valores de las dos variables deben cumplir las siguientes restricciones (o desigualdades o sujeto a), a continuación, se presenta el problema:

$PPL:$  Optimizar  $z = f(x, y) = ax + by$

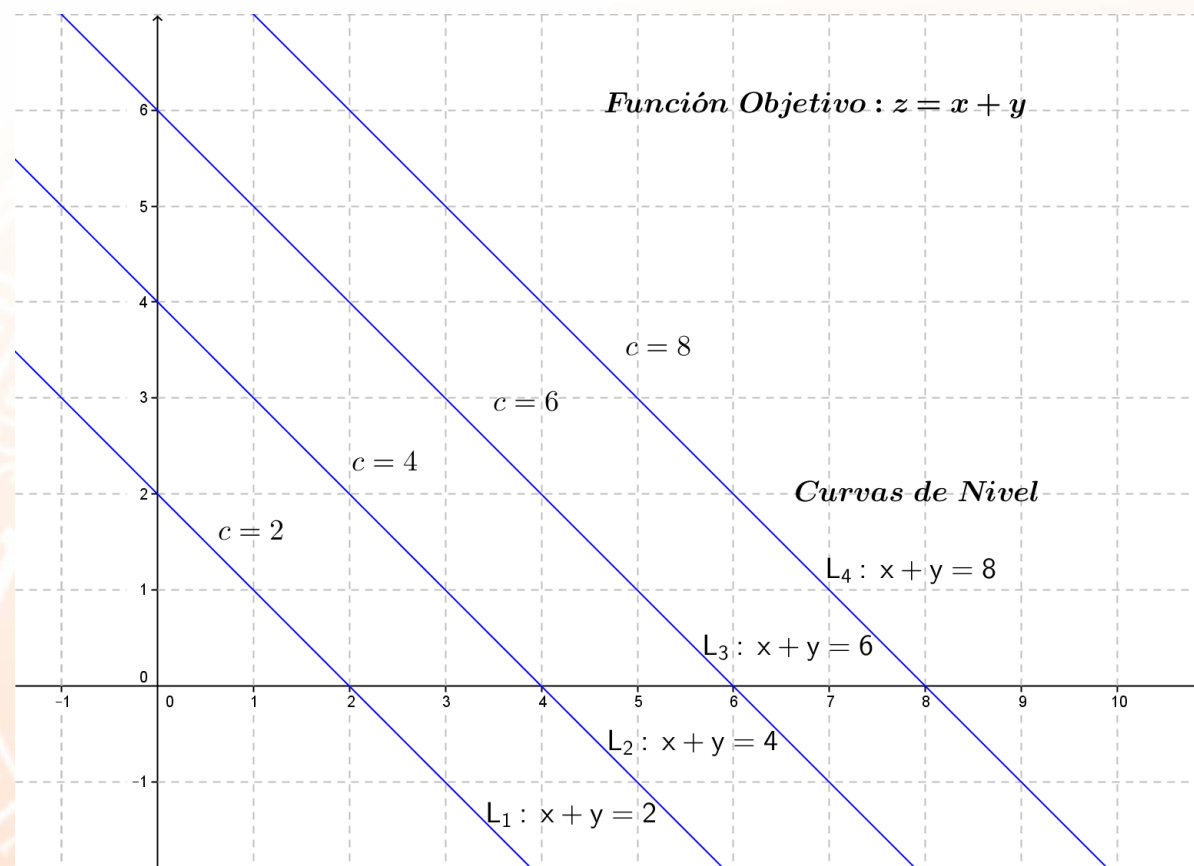
$$\text{sujeto a } \begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$



**Nota:** El método gráfico se basa en dos teoremas, el primero fija el valor de la función objetivo para encontrar las curvas de nivel y el segundo define el vector normal a la curva de nivel donde la función crece de valor.

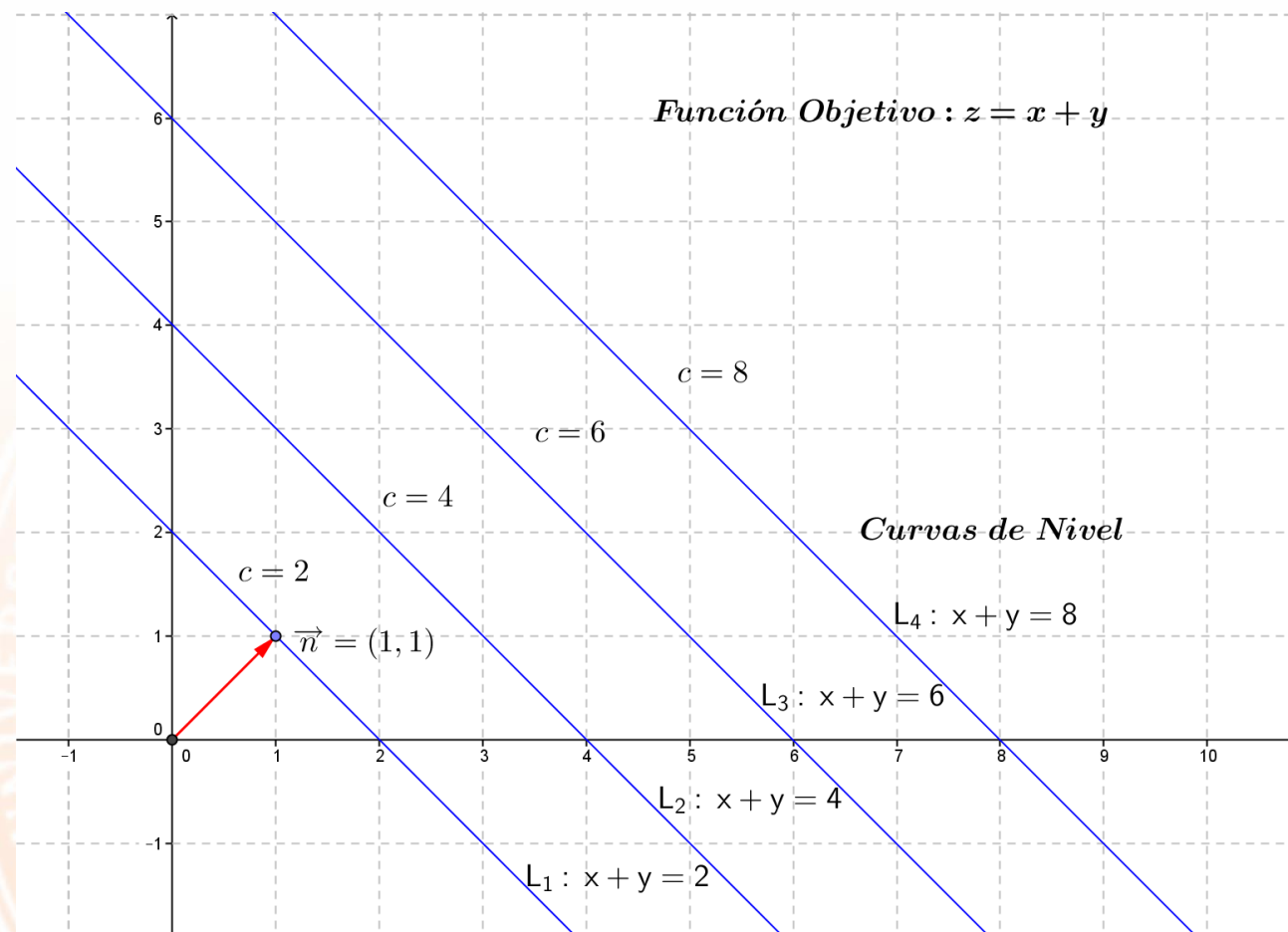
### Teorema de invarianza

Para cada valor de  $z = c$  en la función objetivo, se define una recta  $L: ax + by = c$ , llamada curva de nivel. Donde en cada punto de la curva de nivel (recta) se obtiene un mismo valor de la función objetivo.



## Teorema de monotonía

Graficamos las curvas de nivel de la función objetivo, definidas para cada valor de  $z = c$ . Las curvas de nivel (rectas) son paralelas porque tienen un mismo valor de la pendiente  $m = -\frac{a}{b}$ , luego tienen un vector normal  $\vec{n} = (a, b)$  y en la dirección que apunta dicho vector la función objetivo aumenta de valor.

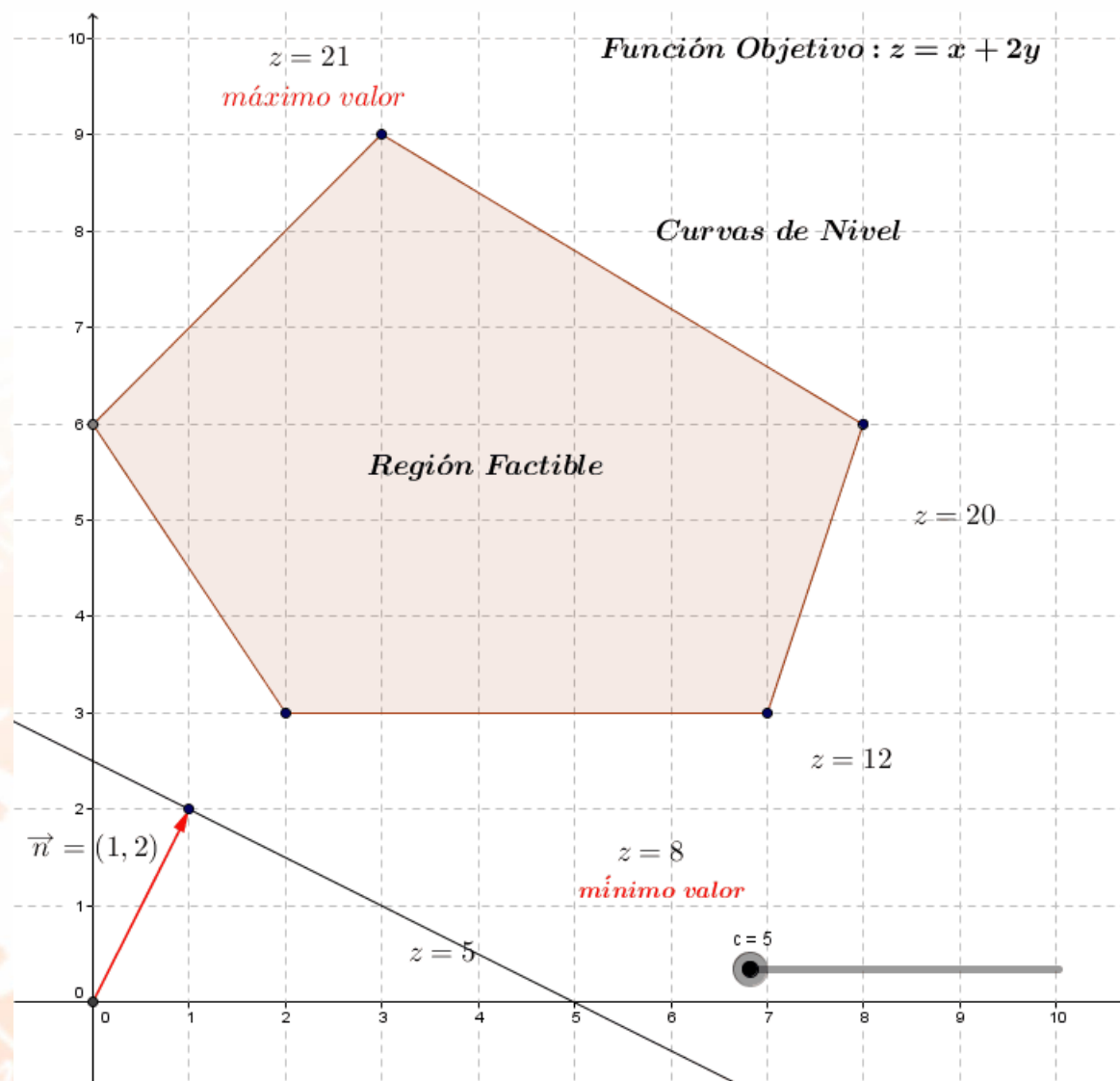


**Ejemplo:** Apliquemos los dos teoremas a la función objetivo  $z = x + 2y$ , sujeta a la región factible que se muestra en la figura:

1) Encontremos las curvas de nivel (rectas) de la función objetivo.

2) Mostremos el vector normal  $\vec{n} = (1, 2)$  a las curvas de nivel, donde en dicha dirección la función objetivo aumenta de valor.

3) La figura muestra que la función objetivo alcanza primero su **mínimo** valor en el punto  $(2, 3)$  y su **máximo** valor en el punto  $(3, 9)$  de la región factible.



## Ejercicio 200

Un distribuidor de aparatos para tocar disco compacto tiene dos almacenes  $W_1$  y  $W_2$ . Hay 80 unidades almacenados en  $W_1$  y 70 en  $W_2$ . Dos clientes A y B piden 35 unidades y 60 unidades respectivamente.

El costo de embarque de cada bodega es A y B aparece en la tabla siguiente. ¿Cuál es el valor mínimo del costo total de embarque?

| Almacén | Cliente | Costo unitario de embarque |
|---------|---------|----------------------------|
| $W_1$   | A       | S/ 8                       |
| $W_1$   | B       | S/ 12                      |
| $W_2$   | A       | S/ 10                      |
| $W_2$   | B       | S/ 13                      |

- A) S/1105  
C) S/1015  
E) S/1080

- B) S/1070  
D) S/1060





# Formulación matemática

## Variables de Decisión:

$x$  : número de aparatos solicitados por el cliente A en el almacén  $W_2$ .

$y$  : número de aparatos solicitados por el cliente B en el almacén  $W_2$ .

| Almacén | Cliente | Costo unitario de embarque | Unidades almacenadas |
|---------|---------|----------------------------|----------------------|
| $W_1$   | A       | 8 soles                    | 80                   |
|         | B       | 12 soles                   |                      |
| $W_2$   | A       | 10 soles                   | 70                   |
|         | B       | 13 soles                   |                      |

# Modelo matemático

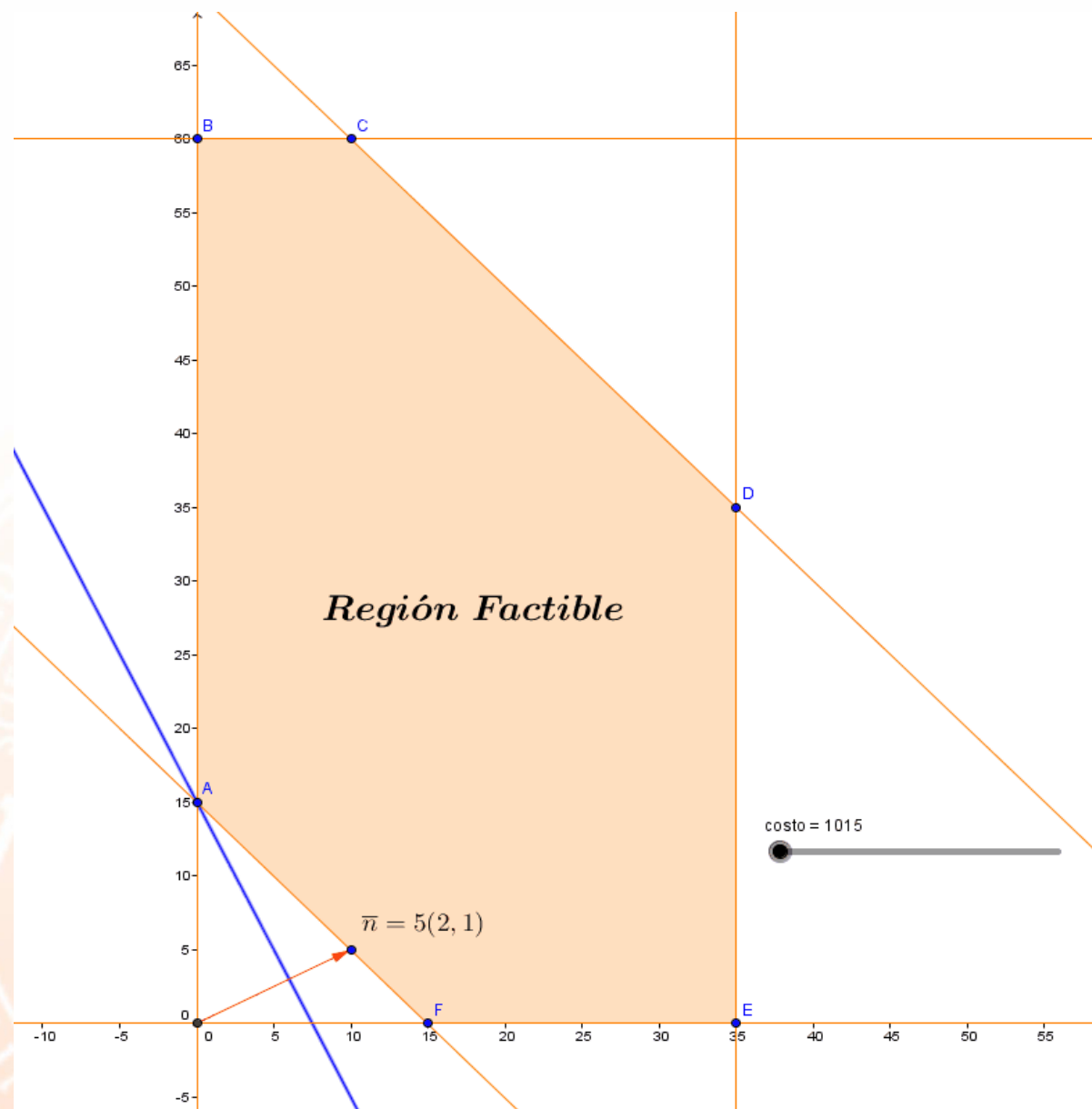
$$\text{Mínimo Costo} = 10x + 13y + 8(35 - x) + 12(60 - y) = 2x + y + 1000$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x + y \leq 70 & (\text{almacén } W_2) \\ 35 - x + 60 - y \leq 80 & (\text{almacén } W_1) \\ 35 - x \geq 0 & (A \text{ en } W_1) \\ 60 - y \geq 0 & (B \text{ en } W_1) \\ x \geq 0 & (A \text{ en } W_2) \\ y \geq 0 & (B \text{ en } W_2) \end{cases}$$



# Método Geométrico

**Respuesta:** Se utiliza el vector normal  $\vec{n} = (10, 5)$  para encontrar el mínimo costo de embarque, que asciende a 1015 soles (valor óptimo) y se obtiene en el punto  $A(0, 15)$  (solución óptima).



# Frases equivalentes

$$p \geq q$$

- p **al menos** q
- p **a lo menos** q
- p **como mínimo** q
- p **cuanto menos** q
- p **por lo menos** q

**Ejemplo 1:** Los anuncios sean vistos **por lo menos** 30 millones de varones.

$$p \geq 30$$

p: número de varones (millones)

$$p \leq q$$

- p **a lo sumo** q
- p **a lo más** q
- p **como máximo** q
- p **como mucho** q
- p **solamente** q

**Ejemplo 2:** Se dispone de **solamente** 100 horas de acabado.

$$p \leq 100$$

p: número de horas de acabado

## Ejercicio 204:

Un estudiante del CEPRE-UNI dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 soles por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes le paga 7 soles por impreso. El estudiante lleva dos bolsas:

Una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo.

¿Cuántos impresos de la empresa B, tendrá que repartir para que su beneficio diario sea máximo?

- A) 30                      B) 50                      C) 100  
D) 120                    E) 150

## Formulación matemática

### Variables de Decisión:

$x$  : número de impresos repartidos de la empresa A.

$y$  : número de impresos repartidos de la empresa B.

| Empresa | Pago por impreso | Capacidad de las bolsas |
|---------|------------------|-------------------------|
| A       | 5 soles          | 120 folletos            |
| B       | 7 soles          | 100 folletos            |



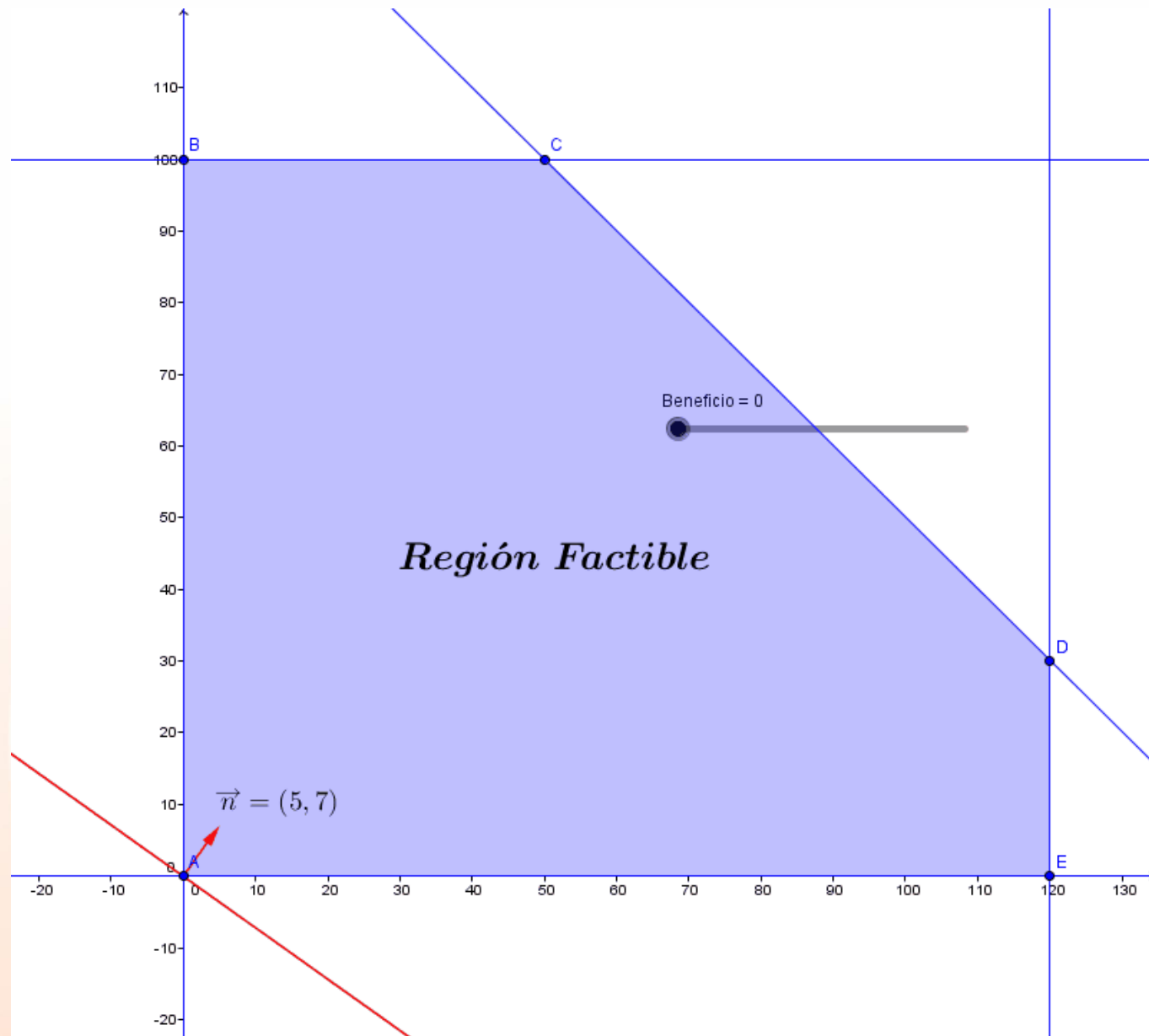
# Modelo matemático

$$\text{Máximo Beneficio} = 5x + 7y$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x + y \leq 150 & (\text{máximo número de folletos}) \\ x \leq 120 & (\text{empresa A capacidad bolsa}) \\ y \leq 100 & (\text{empresa B capacidad bolsa}) \\ x \geq 0 & (\text{condición no negatividad empresa A}) \\ y \geq 0 & (\text{condición no negatividad empresa B}) \end{cases}$$

# Método Geométrico

**Respuesta:** Se utiliza el vector normal  $\vec{n} = (5, 7)$  para encontrar el máximo beneficio, que asciende a 950 soles (valor óptimo) y se obtiene en el punto  $C(50, 100)$  (solución óptima).



# Casos especiales

En los dos ejemplos anteriores, se tiene una **única solución óptima**. Esto no siempre ocurre en todos los PPL. Se pueden dar también las siguientes posibilidades:

**Caso 1:** Algunos PPL tienen un **número infinito de soluciones óptimas**.

**Caso 2:** Algunos PPL **no tienen solución factible**.

**Caso 3:** Algunos PPL son **no acotados**.

Veamos un ejemplo por cada caso:



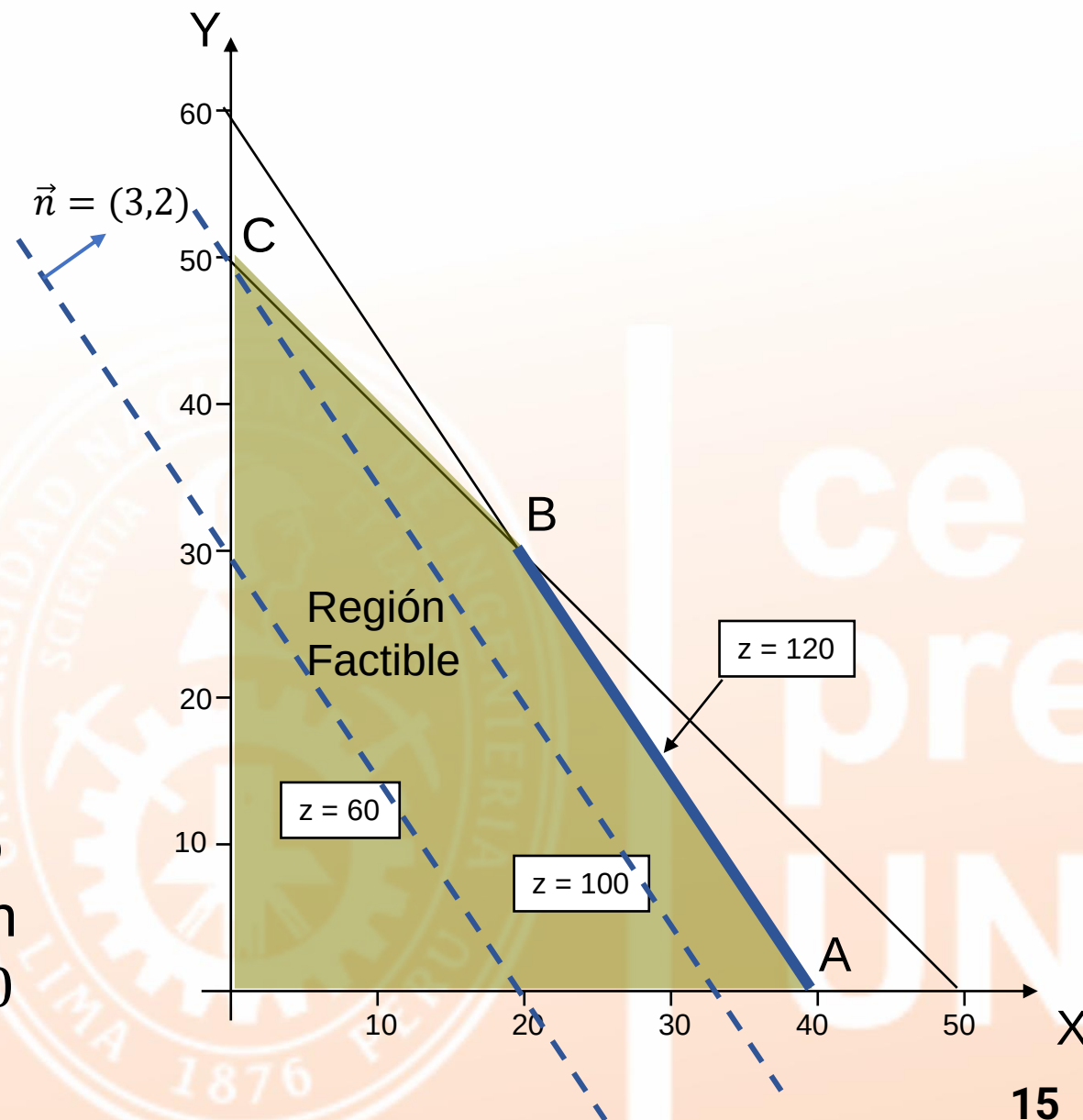
## Caso 1:

Consideremos el siguiente problema:

$$\text{Máximo } z = 3x + 2y$$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Cualquier punto (solución) situado en el **segmento AB** es una solución óptima y el del valor óptimo es 120



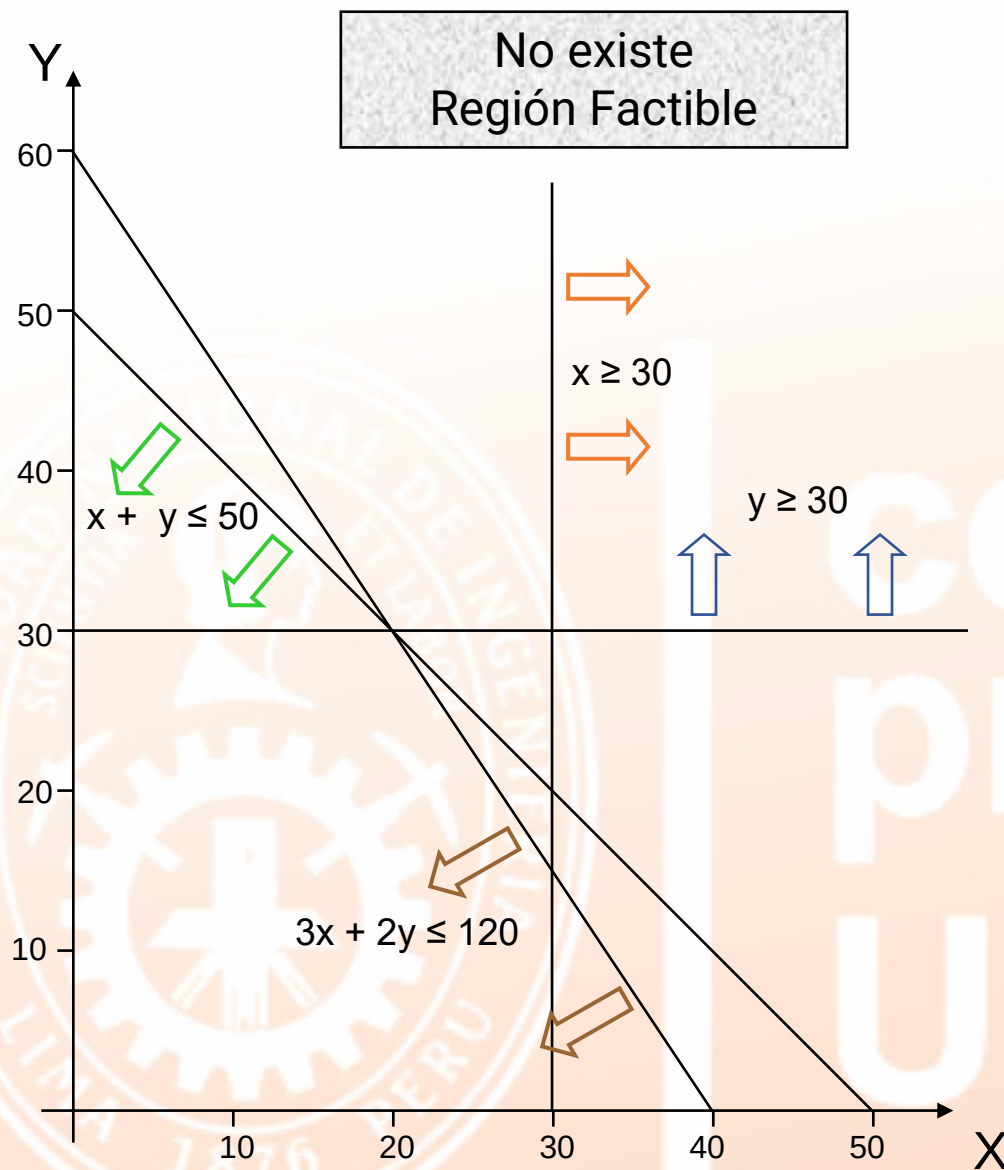
## Caso 2:

Consideremos el siguiente problema:

$$\text{Máximo } z = 3x + 2y$$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ x + y \leq 50 \\ x \geq 30 \\ y \geq 30 \end{cases}$$

La intersección de las regiones es vacía.

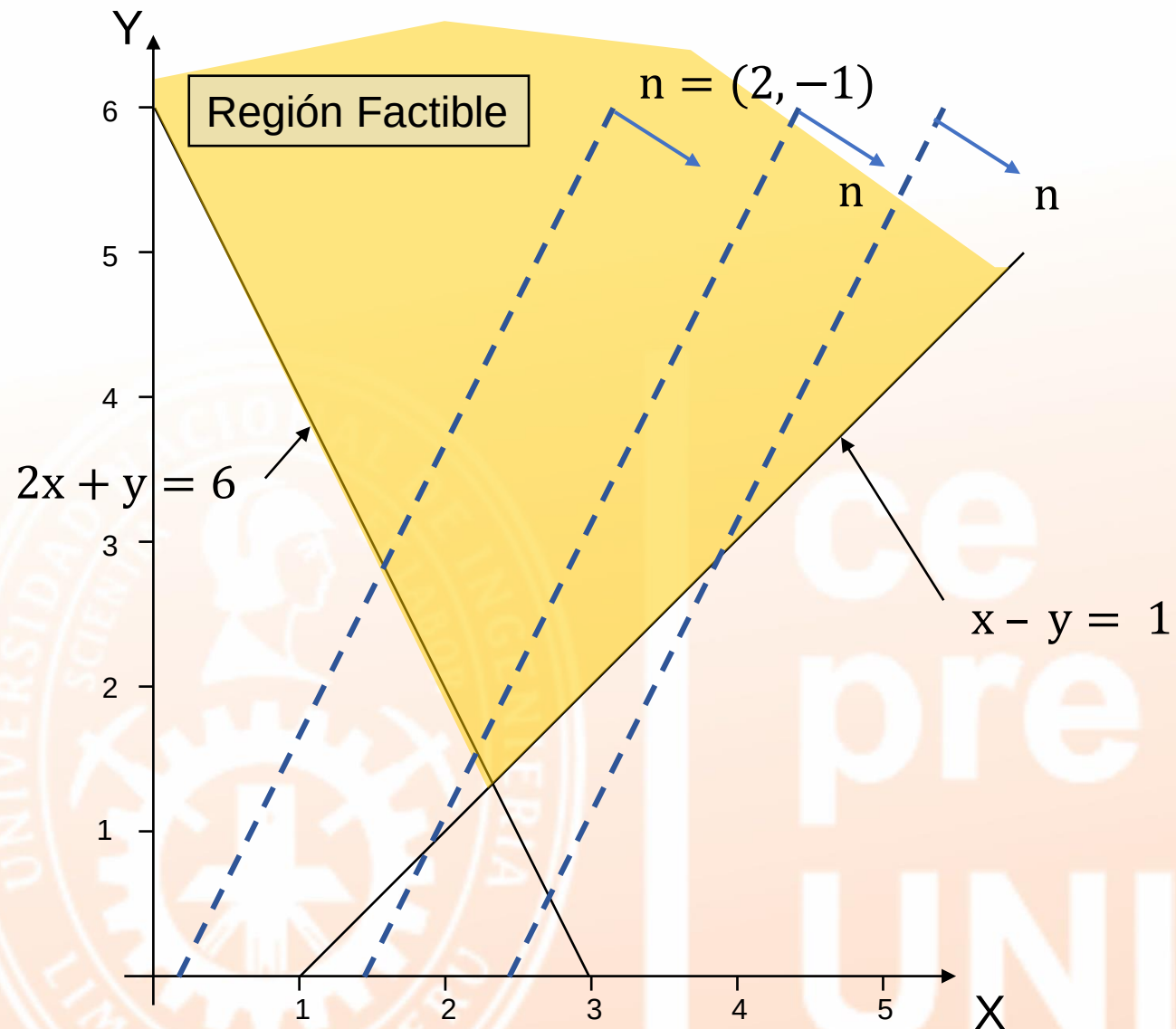


## Caso 3:

máximo  $z = 2x - y$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} x - y \leq 1 \\ 2x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función  $z$  se mantiene constante en las rectas cuya normal es  $\vec{n} = (2, -1)$ , y crece en la dirección de  $\vec{n} = (2, -1)$ , pero estas rectas no salen de la región factible (ya que no es acotada). Por lo tanto **no existe máximo**.





210. Dado el PPL

$$\min_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z)$$

Donde  $P$  es la pirámide  $A-BCDE$ .

Si  $\min_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z) = f(A)$

Siendo una función lineal  $f(x,y,z) = ax + by + cz$  y además se cumple que  $f(A) = f(B) = f(C)$ . Indique el valor de las siguientes afirmaciones.

I.  $\min_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z) = \max_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z) = f(A)$

II.  $\min_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z) = f(A) < \max_{(x,y,z) \in P} f(x,y,z)$

III.  $f(A) = f(B) = f(C) < f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in P - \{A,B,C\}$

IV.  $f(A) = f(B) = f(C) > f(x,y,z), \forall (x,y,z) \in P - \{A,B,C\}$

- |         |         |         |
|---------|---------|---------|
| A) FFFF | B) FVFF | C) VFVV |
| D) VVVV | E) VFVF |         |

## Resolución:

Según el gráfico en GeoGebra de la página 19:

- I. (F) La función objetivo alcanza su máximo valor en el segmento  $\overline{DE}$  de la región triangular  $ADE$ .
- II. (V)
- III. (F) La función objetivo alcanza su mínimo valor en la región triangular  $ABC$  de la pirámide  $P$ , entonces en los puntos interiores de la región triangular  $ABC$  también la función objetivo alcanza su mínimo valor.
- IV. (F)

